Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département d'Informatique
A.U : 2016 / 2017

Correction de l'Examen de Recherche Opérationnelle
Session Normale| Filière : SMI-5
Durée : **2h** - Documents **non autorisés**

Exercice 1: [3 points][~ 15 minutes]

Un fabricant de yaourt produit 2 types de yaourts A et B à partir de fraise, de lait et de sucre. La production de 1 Kg de chaque type de yaourt doit respecter les proportions suivantes:

	Quantité en Kg de Fraise	Quantité en Kg de Lait	Quantité en Kg de Sucre
1 Kg de A	2	1	0
1 Kg de B	3	2	1

Les matières premières sont en quantité limitée : 90 Kg (Kilogrammes) de fraises, 60 Kg de lait et 30 Kg de sucre. La vente du yaourt **A** rapporte 40 Dh par Kg et celle du yaourt **B** rapporte 60 Dh par Kg.

1. Formuler le problème sous forme d'un programme linéaire en précisant la signification de chaque variable.

   Solution :

   Max $Z = 40X_A + 60X_B$

   SC

   $2X_A + 3X_B \leq 90$

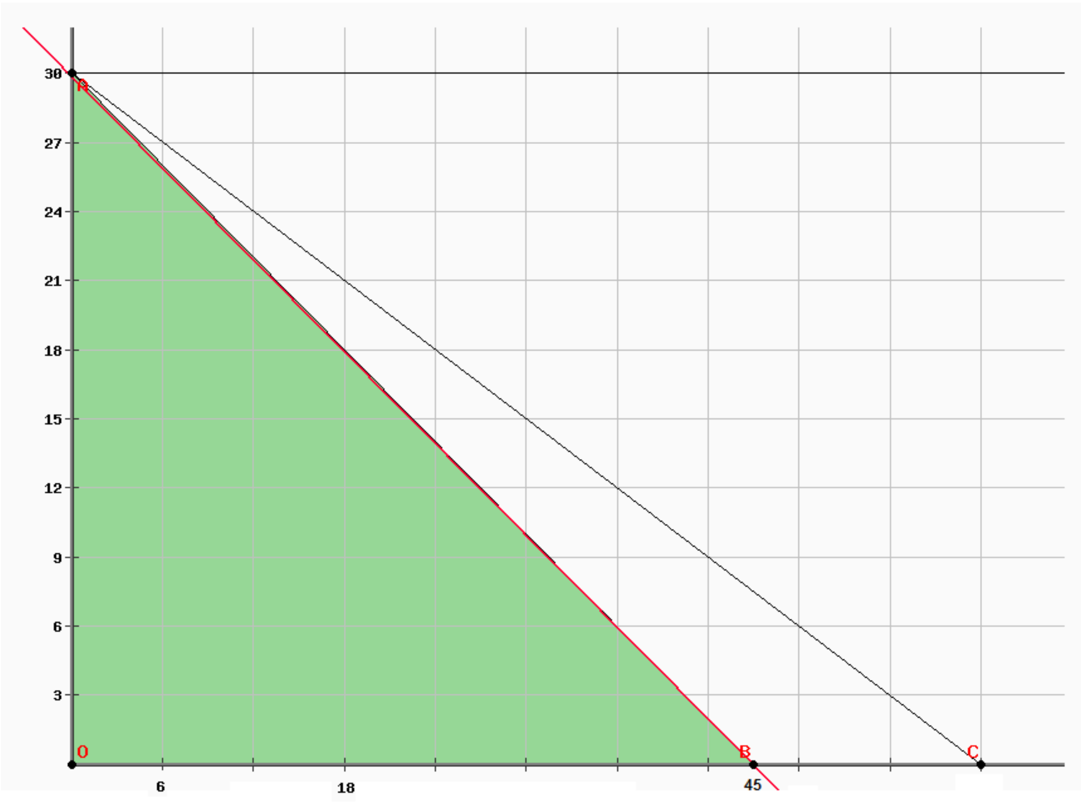
   $X_A + 2X_B \leq 60$

   $X_B \leq 30$

   $X_A , X_B \geq 0$

2. Représenter graphiquement le problème en hachurant l'espace de solutions réalisables.

   Solution :



Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département d'Informatique
A.U : 2016 / 2017

3. A partir de la représentation graphique, trouver une solution en précisant le(s) phénomène(s) rencontré(s) par ce programme linéaire.

Solution :

Max Z = 1800 relatif au point (0,30) ou (45,0)

Phénomènes rencontrés :

- Dégénérescence de 1ère espèce :
  Droite régissant la contrainte 1 ($2X_A + 3X_B = 90$) parallèle à Z ($40X_A + 60X_B = 0$)
- Dégénérescence de 2ème espèce : Plus que deux droites (4 droites) passent par le point (0,30) :
  - $2X_A + 3X_B = 90$
  - $X_A + 2X_B = 60$
  - $X_B = 30$
  - $X_A = 0$

Exercice 2: Algoritme de Ford [5 points][~ 30 minutes]

- Dans le graphe orienté GR-1 = (X, U) valué par des longueurs positives, utiliser l'algorithme de Ford vu au cours (voir organigramme) pour déterminer le plus court chemin depuis le sommet X_0 jusqu'au sommet X_8.
- En déduire le chemin optimal ainsi que sa valeur.

N.B. Ecrivez votre réponse en utilisant le tableau sur la page 3/4.

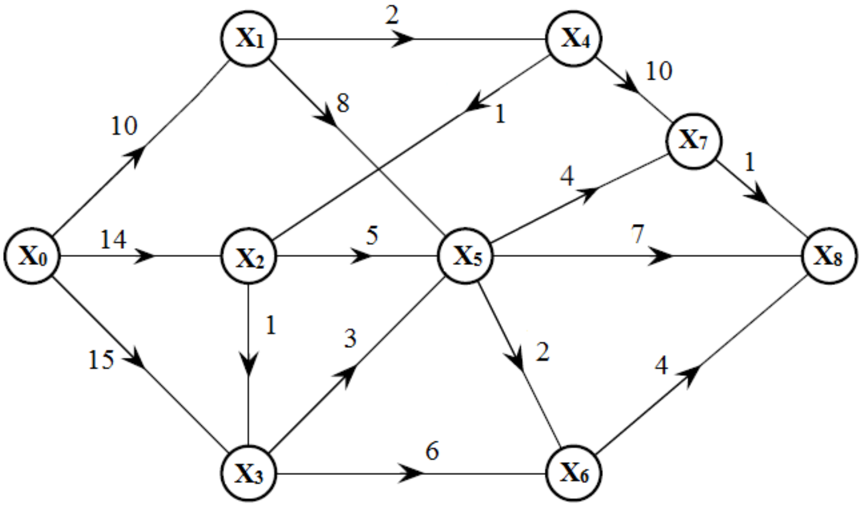
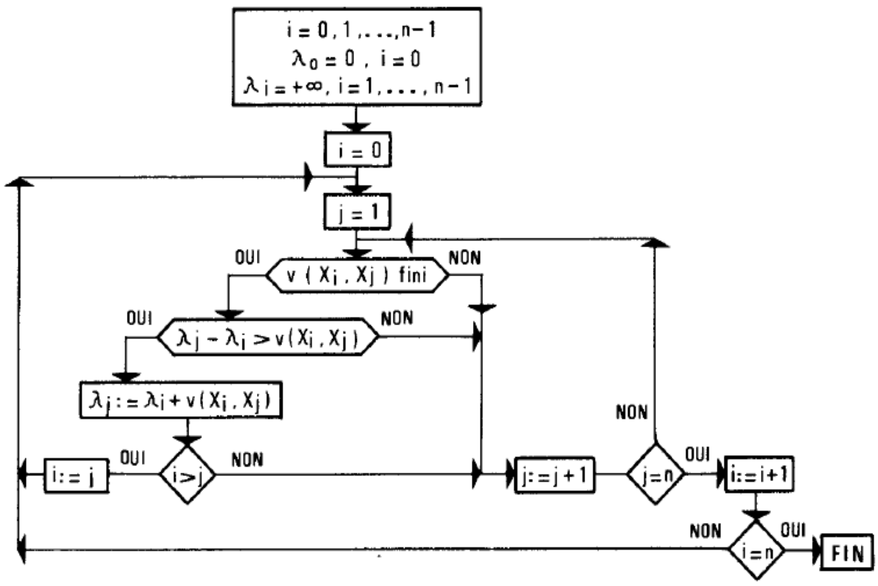


Figure 1. Graphe orienté GR-1

$v(X_i, X_j) = +\infty$ si $(X_i, X_j) \notin U$.



Organigramme de l'algorithme de Ford

Exercice 3:[2 points][~10 minutes]

Une entreprise fabrique deux produits P1 et P2. Lors de la vente d'un article de P1, l'entreprise gagne 12 Dirhams, alors qu'elle ne gagne que 9 Dirhams lors de la vente d'un article du produit P2. La fabrication d'une unité de P1 nécessite 3kg d'une matière première M et la fabrication d'une unité de P2 nécessite 2kg de la matière première M.

Sachant que la capacité de la société en matière première M ne dépasse pas 30Kg:

1. Formuler le problème sous forme d'un Programme Linéaire.
2. Résoudre ce programme linéaire en utilisant la méthode de simplexe, en précisant à chaque itération la valeur de la fonction objectif ainsi que les coordonnées relatives.

Solution :

1. Max $Z = 12X_1 + 9X_2$
   SC
   $3X_1 + 2X_2 \leq 30$
   $X_1 , X_2 \geq 0$
2.

Itération 1	X_1	X_2	e_1	
e_1	3	2	1	30
Z	12	9	0	**0**

$(X_1,X_2)= (0 , 0)$

Itération 2	X_1	X_2	e_1	
X_1	1	2/3	1/3	10
Z	0	1	-4	**120**

$(X_1,X_2)= (10 ,0)$

Itération 3	X_1	X_2	e_1	
X_2	3/2	1	1/2	15
Z	**-3/2**	0	**-9/2**	**135**

$(X_1,X_2)= (0 ,15)$

Exercice 4: [10 points][~ 65 minutes]

Soit la fonction objectif $P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ suivante :

$P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 30x_1 + 16x_2 + 15x_3 + 20x_4 + 4x_5$

Sous contraintes

- $6x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 120$
- $5x_2 + x_3 \leq 15$
- $x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 30$
- $3x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 80$
- $x_1 + 2x_5 \leq 40$
- $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0$

1. En utilisant l'algorithme de simplexe, maximiser la fonction objectif $P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ en précisant à chaque itération de l'algorithme la valeur de la fonction objectif ainsi que les coordonnées relatifs.
   N.B. Vous pouvez répondre sur la page 4/4. Si le nombre des itérations est insuffisant, compléter la solution sur votre double feuille d'examen.
2. En considérant le programme linéaire traité dans la question 1 comme programme primal, écrivez le programme dual correspondant.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département d'Informatique
A.U : 2016 / 2017

Réponse à l'exercice 2 :

	i	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Init	-	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Iter 1	0	0	10	14	15	∞	∞	∞	∞	∞
Iter 2	1	0	10	14	15	12	18	∞	∞	∞
Iter 3	2	0	10	14	15	12	18	∞	∞	∞
Iter 4	3	0	10	14	15	12	18	21	∞	∞
Iter 5	4	0	10	13	15	12	18	21	∞	∞
Iter 6	2	0	10	13	14	12	18	21	∞	∞
Iter 7	3	0	10	13	14	12	17	20	∞	∞
Iter 8	4	0	10	13	14	12	17	20	22	∞
Iter 9	5	0	10	13	14	12	17	19	21	24
Iter 10	6	0	10	13	14	12	17	19	21	23
Iter 11	7	0	10	13	14	12	17	19	21	22
Iter 12	8	0	10	13	14	12	17	19	21	22
Iter 13										
Iter 14										
Iter 15										
Iter 16										
Iter 17										
Iter 18										
Iter 19										
Iter 20										
Iter 21										
Iter 22										
Iter 23										
Iter 24										
Iter 25										

Le chemin optimal est : X_0, X_1, X_4, X_2, X_3, X_5, X_7, X_8

Sa valeur est : 22

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département d'Informatique

Réponse à l'exercice 4 :

I_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
e_1	0	6	5	-1	0	1	0	0	0	0	120
e_2	0	5	1	0	0	0	1	0	0	0	15
e_3	1	-1	0	2	0	0	0	1	0	0	30
e_4	3	2	0	1	0	0	0	0	1	0	80
e_5	1	0	0	0	2	0	0	0	0	1	40
P	30	16	15	20	4	0	0	0	0	0	0

Coordonnées :
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ =
(0,0,0,0,0)

I_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
e_1	0	6	5	-1	0	1	0	0	0	0	120
e_2	0	5	1	0	0	0	1	0	0	0	15
e_3	0	-5/3	0	5/3	0	0	0	1	-1/3	0	10/3
x_1	1	2/3	0	1/3	0	0	0	0	1/3	0	80/3
e_5	0	-2/3	0	-1/3	2	0	0	0	-1/3	1	40/3
P	0	-4	15	10	4	0	0	0	-10	0	800

Coordonnées :
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ =
(80/3,0,0,0,0)

I_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
e_1	0	-19	0	-1	0	1	-5	0	0	0	45
x_3	0	5	1	0	0	0	1	0	0	0	15
e_3	0	-5/3	0	5/3	0	0	0	1	-1/3	0	10/3
x_1	1	2/3	0	1/3	0	0	0	0	1/3	0	80/3
e_5	0	-2/3	0	-1/3	2	0	0	0	-1/3	1	40/3
P	0	-79	0	10	4	0	-15	0	-10	0	1025

Coordonnées :
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ =
(80/3,0,15,0,0)

I_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
e_1	0	-20	0	0	0	1	-5	3/5	-1/5	0	47
x_3	0	5	1	0	0	0	1	0	0	0	15
x_4	0	-1	0	1	0	0	0	3/5	-1/5	0	2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	-1/5	2/5	0	26
e_5	0	-1	0	0	2	0	0	1/5	-2/5	1	14
P	0	-69	0	0	4	0	-15	-6	-8	0	1045

Coordonnées :
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ =
(26,0,15,2,0)

I_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
e_1	0	-20	0	0	0	1	-5	3/5	-1/5	0	47
x_3	0	5	1	0	0	0	1	0	0	0	15
x_4	0	-1	0	1	0	0	0	3/5	-1/5	0	2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	-1/5	2/5	0	26
x_5	0	-1/2	0	0	1	0	0	1/10	-1/5	1/2	7
P	0	-67	0	0	0	0	-15	-32/5	-36/5	-2	1073

Coordonnées :
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ =
(26,0,15,2,7)