

**Correction de l'Examen de rattrapage de Recherche Opérationnelle
 Filière : SMI-5**

Durée : 1 h 30 min - Documents non autorisés

Exercice 1: [10 points][~ 50 minutes]

Soit la fonction objectif $f(x,y,z,w)$ suivante :

$$f(x,y,z,w) = 3x + 2y + 7z + 8w$$

sous contraintes :

- $7x + 8y + 10z + 12w \leq 54$
- $x + z + w \leq 18$
- $5x + y + 9w \leq 18$
- $x, y, z, w \geq 0$

1. En utilisant l'algorithme de simplexe, maximiser la fonction objectif $f(x,y,z,w)$ en précisant à chaque itération de l'algorithme la valeur de la fonction objectif ainsi que les coordonnées relatives.

Itération 1

x	y	z	w	e1	e2	e3	
7	8	10	12	1	0	0	54
1	0	1	1	0	1	0	18
5	1	0	<u>9</u>	0	0	1	18
3	2	7	8	0	0	0	0 $Z_{opt} = 0 (0,0,0,0)$

Itération 2

x	y	z	w	e1	e2	e3	
1/3	20/3	<u>10</u>	0	1	0	-4/3	30
4/9	-1/9	1	0	0	1	-1/9	16
5/9	1/9	0	1	0	0	1/9	2
-13/9	10/9	7	0	0	0	-8/9	16 $Z_{opt} = 16 (0,0,0,2)$

Itération 3

x	y	z	w	e1	e2	e3	
1/30	2/3	1	0	1/10	0	-2/15	3
37/90	-7/9	0	0	-1/10	1	1/45	13
5/9	1/9	0	1	0	0	<u>1/9</u>	2
-151/90	-32/9	0	0	-7/10	0	2/45	37 $Z_{opt} = 37 (0,0,3,2)$

Itération 4

x	y	z	w	e1	e2	e3	
7/10	4/5	1	6/5	1/10	0	0	27/5
3/10	-4/5	0	-1/5	-1/10	1	0	63/5
5	1	0	9	0	0	1	18
-19/10	-18/5	0	-2/5	-7/10	0	0	189/5

$$Z_{\text{opt}} = 189/5 \ (0,0,27/5,0)$$

2. En considérant le programme linéaire traité dans la question 1 comme programme primal, écrivez le programme dual correspondant :

$$\text{Min} = 54u + 18v + 18t$$

sous contraintes :

- $7u + v + 5t \geq 3$
- $8u + \quad + t \geq 2$
- $10u + v \quad \geq 7$
- $12u + v + 9t \geq 8$
- $u, v, t \geq 0$

Exercice 2: (modélisation) [1.5 points][~ 7 minutes]

Au quinzième siècle, un Touareg compte gagner un peu d'or (monnaie) en investissant dans des dromadaires qu'il sait pouvoir revendre à Tombouctou. Comme sa route passe par Taoudeni, il pense aussi y acheter du sel pour tirer d'avantage de bénéfice de son voyage.

Il sait qu'il pourra obtenir au terme de son voyage 20 po (pièce d'or) de bénéfice par dromadaire, et 2 pa (pièce d'argent, 1 po = 10 pa) de bénéfice par kg de sel.

Avant toute chose il faut déjà qu'il achète les dromadaires et le sel.

Chaque dromadaire lui coûte 5 po, et chaque kg de sel 0.2 pa. Il peut investir 32,5 po.

Sachant qu'un dromadaire peut transporter jusqu'à 75 kg de sel, comment ce Touareg doit investir son épargne (إنخار) pour tirer le bénéfice maximal de son investissement ?

Ecrire le problème sous forme d'un Programme Linéaire en précisant la signification de chaque variable.

Solution :

Soient d le nombre de dromadaires achetés, et s le nombre de kg de sel achetés. Le bénéfice du voyage sera (exprimé en pa) :

$$\text{Max } Z = 200 d + 2s$$

SC.

$$50 d + 0.2 s \leq 325$$

$$-75 d + s \leq 0 \quad (\text{ou } s / 75 \leq d)$$

$$d, s \geq 0$$

Exercice 3: [4.5 points][~ 21 minutes]

Soit la matrice suivante, représentative d'un graphe $G(X, \Gamma)$, dont les sommets sont : A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		1	1				1			
B	1								1	
C		1				1				
D										1
E						1				
F					1		1			
G					1					
H					1					1
I				1						
J								1	1	

- En utilisant la méthode de DEMOUCRON vue dans le cours, extraire les classes d'équivalences relatives à la relation R_c .
 On rappelle que X est en relation R_c avec Y ssi « il existe au moins un chemin de X à Y et au moins un chemin de Y à X »
- Existe-t-il un circuit hamiltonien, justifier votre réponse ?

Solution :

1-

$$\Gamma(A) = \{A, B, C, G, I, F, E, D, J, H\} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \{A, B, C\}$$

$$C_1 = \Gamma(A) \cap \Gamma^{-1}(A) = \{A, B, C\}$$

$$\Gamma(D) = \{D, J, H, I, E, F\} = \{D, E, F, H, I, J\}$$

$$\Gamma^{-1}(D) = \{D, I, B, J, A, C, H\} = \{A, B, C, D, H, I, J\}$$

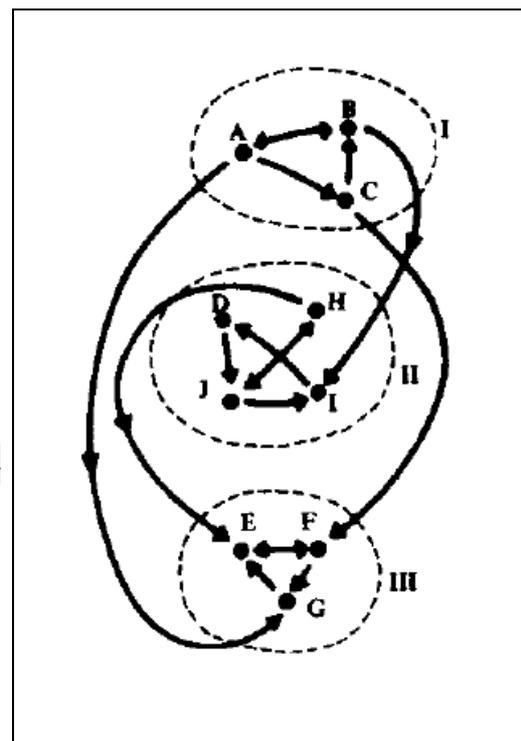
$$C_2 = \Gamma(D) \cap \Gamma^{-1}(D) = \{D, H, I, J\}$$

$$\Gamma(E) = \{E, F, G\}$$

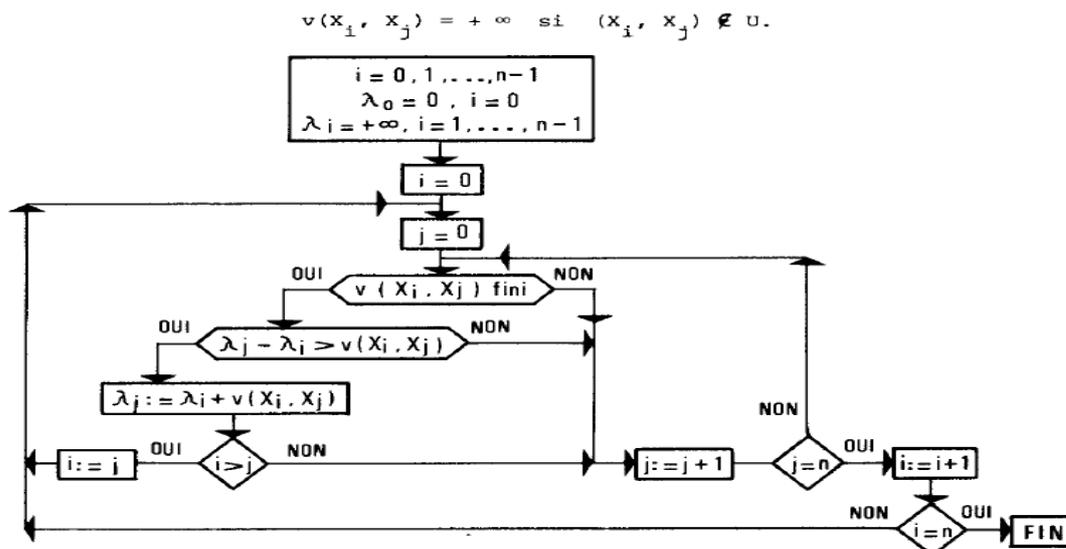
$$\Gamma^{-1}(E) = \{E, F, G, H, C, A, J, B, D, I\} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$$

$$C_3 = \Gamma(E) \cap \Gamma^{-1}(E) = \{E, F, G\}$$

- 2- Il y a un chemin hamiltonien unique (ACBIDJHEFG) qui ne se referme pas sur lui-même. Il n'existe pas un circuit hamiltonien.



Exercice 4: [4 points]



Organigramme 1: Description l'algorithme de Ford pour la recherche d'un chemin minimal dans un graphe

	i	λ₀	λ₁	λ₂	λ₃	λ₄	λ₅
Itération 0	initialisation	<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞
Itération 1	0	0	<u>3</u>	<u>8</u>	<u>6</u>	∞	∞
Itération 2	1	0	3	8	<u>5</u>	<u>9</u>	∞
Itération 3	2	0	3	8	5	9	∞
Itération 4	3	0	3	<u>7</u>	5	9	<u>12</u>
Itération 5	2	0	3	7	5	<u>8</u>	12
Itération 6	3	0	3	7	5	8	12
Itération 7	4	0	3	7	5	8	<u>10</u>
Itération 8	5	0	3	7	5	8	10

Chemin optimal : $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5$
et sa valeur vaut: 10.