Série de TD N° 4
Programmation Linéaire : Dualité – variables artificielles

Règle de Bland: Lorsque plusieurs variables sont susceptibles d'entrer ou de sortir de la base, on choisit toujours celle qui a l'indice le plus petit.

N.B Pour appliquer la règle de Bland, nommer toutes les variables (d'écart et artificielle) x_i

I. Dualité

Exercice 1:

Min $x_1 + x_2$

Sc

- $2x_1 + x_2 \geq 12$
- $5x_1 + 8x_2 \geq 74$
- $x_1 + 6x_2 \geq 24$
- $x_1 , x_2 \geq 0$

- Ecrire le programme dual correspondant.
- Résoudre le PL dual via la méthode de simplexe ?
- Comparer les tableaux finaux du primal et dual, conclusion ?

Exercice E2: [2 points][~ 10 minutes]

Soit programme linéaire suivant :

Max $P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5$

Sous contraintes

- $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 32$
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 25$
- $x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 40$
- $3x_2 - x_3 - x_4 \leq 15$
- $x_5 \leq 45$
- $x_1, x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \geq 0$

1. Écrire le programme dual correspondant.
2. Sachant que le tableau ci-dessous représente le tableau final du programme primal, donner **en justifiant votre réponse**:
   a) La valeur de la fonction objectif du **Primal** et les coordonnées correspondantes
   b) La valeur de la fonction objectif du **Dual** et les coordonnées correspondantes

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
e_1	0	17/12	-9/4	0	0	1	-2/3	-1/4	0	0	16/3
x_1	1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	0	25/3
x_4	0	1/4	5/4	1	0	0	0	1/4	0	0	10
e_4	0	13/4	1/4	0	0	0	0	1/4	1	0	25
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	45
P	0	-3/2	-13/2	0	0	0	-1	-3/2	0	-4	

Exercice 3:

Deux produits P1 et P2 fabriqués en quantité x_1 et x_2, nécessitant trois ressources disponibles en quantités données. L'entreprise cherche à maximiser le bénéfice total provenant de la vente des 2 produits.

Max $[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2]$

- $3x_1 + 9x_2 \leq 270$
- $4x_1 + 5x_2 \leq 360$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources de l'entreprise. Il propose à l'entreprise les prix unitaires y1, y2, y3 pour chacune des ressources.
L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient pour chaque produit un prix de vente au moins égal au profit qu'elle ferait en vendant ses produits.
De son côté, l'acheteur cherche à minimiser ses dépenses.

1. Ecrire la proposition de l'acheteur sous forme d'un PL.
2. Trouver la solution optimale ainsi que les coordonnées correspondantes.

II. Algorithme de simplexe : M-Méthodes

Exercice 4:

Résoudre le PL suivant en utilisant la M-méthode.

Max $Z = 4x + y$
SC
$3x + y \geq 3$
$4x + 3y \geq 6$
$x + 2y \leq 4$
$x, y \geq 0$

Exercice 5: [5 points][~ 35 minutes]

Deux substances S et T, contiennent chacune deux types d'ingrédients I et F. Une livre (unité de masse) de S contient 5 mesures (1 mesure = 30g) de I et 8 mesures de F. Une livre de T contient 4 mesures de I et 2 mesures de F. Un fabricant projette de combiner les deux substances pour obtenir un mélange qui contienne au moins 540g de I et 960g mesures de F. Le coût de S est de 8 um la livre et le coût de T de 5 um la livre.

L'objectif est de calculer la quantité (**en mesures**) de chaque substance qu'il faudrait utiliser pour maintenir les coûts au minimum ?

1. Modéliser le problème sous forme de PL.
2. Résoudre graphiquement le PL.
3. Résoudre le PL en utilisant la M-méthode.

III. Algorithme de simplexe en 2 phases

Exercice 6: Résoudre le PL suivant en utilisant le simplexe en 2 phases.

Min $x_1 + x_2$
Sc

- $2x_1 + x_2 \geq 12$
- $5x_1 + 8x_2 \geq 74$
- $x_1 + 6x_2 \geq 24$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Exercice 7: Algorithme de simplexe en 2 phases [6 points][~ 45 minutes]

Soit programme linéaire suivant :

Max $Z = 5x_1 + 7x_2$
SC

- $x_1 + x_2 \geq 40$
- $2x_1 + 3x_2 \geq 95$
- $x_1 \leq 40$
- $x_2 \leq 30$
- $x_1, x_2 \geq 0$

1. Représenter graphiquement le problème en hachurant l'espace de solutions réalisables. Les coordonnées des sommets doivent appartenir au schéma.
2. Pour utiliser l'algorithme de simplexe en deux phases :
   2.1. Résoudre la **phase 1** en indiquant à chaque itération la valeur de la fonction objectif ainsi que les coordonnées relatives.
   En déduire les coordonnées du lancement de la phase 2.
   2.2. Résoudre la **phase 2** en indiquant à chaque itération la valeur de la fonction objectif ainsi que les coordonnées relatives.
   2.3. **En déduire** la valeur optimale de la fonction objectif Z ainsi que les coordonnées relatives.

Exercice 8:

Résoudre les PLs suivants en utilisant la méthode de simplexe en 2 Phases :

Min $z = 4x_1 + x_2$
SC
$3x_1 + x_2 = 3$
$4x_1 + 3x_2 \geq 6$
$x_1 + 2x_2 \leq 4$
$x1, x2 \geq 0$

Max $z = 9x_1 + 2x_2$
SC
$2x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 \geq 1$
$x_1 + x_2 \leq 2$
$x1, x2 \geq 0$

Max $z = 5x_1 + 7x_2$
SC
$x_1 + x_2 \geq 6$
$x_1 \geq 4$
$x_2 \leq 3$
$x1, x2 \geq 0$