ENSAM
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Algorithmique Avancée

Tri Rapide (Quick sort)

Master Big Data & Internet des Objets
(BDIO)

Animé par : Dr. ibrahim GUELZIM
Email : ib.guelzim@gmail.com

Sommaire

- Rappels
  - Introduction et notions générales
  - Analyse et conception d'algorithmes
  - Complexité d'algorithmes classiques : 3 Tris de tableaux, 2 recherches dans un tableau, Schéma de Hörner
  - Preuves d'algorithmes
- Autres algorithmes de tri :
  - Tri par fusion
  - Tri par Tas
- Complexité moyenne :
  - Application au Tri rapide
  - Algorithmes sur des structures de recherches spéciales (TH , FH, Bloom Filter, CMS)
- Traitements de chaines de Caractères :
  - Fichiers et Enregistrements
  - Recherche de chaine de caractères
  - Compression de données

Tri Rapide

- Exercice : Soit T un Tableau de n entiers naturels,
  - Écrire une solution qui met tous les éléments pairs au début de la liste et tous les éléments impairs à la fin de la liste
- Solution (python) :

```
T =  [9, 6, 5, 13, 0, 10, 15, 22, 12]
indP = 0; indImp = len(T)-1
while indP < indImp:
    if T[indP]%2 == 0:  # si l'élément actuel est pair, passer au suivant
        indP += 1
    else:               # sinon, mettre l'élément actuel à la fin de la liste
        T[indP] , T[indImp] = T[indImp], T[indP]  # permuter
        indImp -= 1
print(T) # Affiche : [ 12, 6, 22, 10, 0, 15, 13, 5, 9 ]
```

- L'ordre interne des éléments pairs ou impairs n'est pas important

Tri Rapide

- Idée Simple & Astusieuse:
  - Tri d'un tableau T de taille n : T[0 , n-1]
  - Plus généralement T[0 , n-1] = T[d , f] (d = 0 et f = n-1)

  - Choisir un élément du tableau : Pivot, noté x

  - Le choix est arbitraire

  - Notre Convention :
    - Dernier élément (x = T[f] = T[n-1])

4	1	7	8	3	2	10	9	5

    - OU, le premier dans d'autres conventions (x = T[d] = T[0])

  - Trouver la position finale du pivot (Lorsque le tableau sera trié)

  - Comment ?

Tri Rapide

- Q : Quelle est la position Finale du pivot T[f] ?
- Méthode appliquée au tableau T[d, f-1] (= T[0, n-2] de taille n-1) :
  - Range tous les éléments **inférieurs** ≤ au pivot au **début** du tableau
  - Range tous les éléments supérieurs ≥ au pivot à la fin du tableau

  - Mise du pivot à sa position finale : permutation

  - Méthode appelée : Partition (T, d, f)
  - Remarque : les éléments **inférieurs** et **supérieurs** ne sont pas forcéments triés
  - Ainsi, La position du pivot est **finale** et égale = **p**

Tri Rapide : Idée Partition :: positions éléments ≤ avant éléments ≥

4	1	7	8	3	2	10	9	5
4	1	7	8	3	2	10	9	5
4	1	7	8	3	2	10	9	5
4	1	7	8	3	2	10	9	5
4	1	7	8	3	2	10	9	5
4	1	3	8	7	2	10	9	5
4	1	3	2	7	8	10	9	5
4	1	3	2	7	8	10	9	5
4	1	3	2	7	8	10	9	5
4	1	3	2	5	8	10	9	7

- Une fois le pivot placé à la position p, on fait appel à la récursivité pour :
  - Le sous tableau à gauche T[d, p-1]
  - Le sous tableau à droite T[p+1, f]

Tri Rapide

- Pseudo Code :

```
Fonction TriRapide ( T , d , f )
Début
        Si f-d ≤ 0 alors
                retourner T
        Sinon
                x = T[ f ]
                p = partition ( T, d, f, x = T[f] )
                TriRapide ( T, d, p-1 )          // Tri de la partie à gauche du pivot
                TriRapide ( T, p+1, f )          // Tri de la partie à droite du pivot
        FinSi
Fin
```

Remarque : l'appel initial pour un tableau T de taille n est **TriRapide (T , 0 , n-1)**

Tri Rapide

- Caractéristiques / Tri Rapide :
  - In place : n'a pas besoin d'un espace auxiliaire comme le tri par fusion
  - Minimise le mouvement des données
  - Selon le principe Diviser pour régner

Tri Rapide

- Partitionnement du Tableau : Partition de Lomuto
  - Partitionner le tableau T[T[0] T[1] … T[n-2] x]
  - À l'itération j , le tableau est partitionné en 3 régions :

  [T[0] … T[i] T[i+1] … T[j-1] T[j] … T[n-2] x]

  - Région Inférieure RI ≤ x
  - Région Supérieure RS ≥ x
  - Région Non Traitée RN
  - Remarque : x ∉ RI , x ∉ RS , x ∉ RN

Tri Rapide

- Partition de Lamuto :
  - Début par l'initialisation : RI = RS = ∅ , RN = T[d , f-1] tels que:
    - i est la dernière position de RI , i = d-1
    - j première position de RN , j = i + 1
  - Si T est de taille n, on commence par d = 0 , f = n-1
  - $j^{ème}$ itération : T = [T[0] … T[i] T[i+1] T[i+2] … T[j-1] T[j] T[j+1] … T[n-2] T[n-1]]
    - L'élémént à traiter : T[j]
    - Si T[j] ≥ x (x = T[n-1]) :
      - T[j] doit ∈ RS
      - Tableau devient T : [T[0] … T[i] T[i+1] T[i+2] … T[j-1] T[j] T[j+1] … T[n-2] T[n-1]]
      - j = j + 1
    - Sinon (T[j] < x)
      - T[j] doit ∈ RI
      - Echanger T[j] et T[i+1]
      - Tableau devient T : [T[0] … T[i] T[j] T[i+2] … T[j-1] T[i+1] T[j+1] … T[n-2] T[n-1]]
      - i = i + 1 , j = j + 1

Tri Rapide

- Partition de Lamuto :
  - Réitérer tant que RN ≠ ∅

  - Après la dernière itération: RN = ∅ , RI et RS deviennent :

    T = [T[0] … T[i] T[i+1] T[i+2] … T[n-2] x]

  - Dernière opération : échanger x et T[i+1]

    T = [T[0] … T[i] x T[i+2] … T[n-2] T[i+1]]

    retourner la position p = i+1

Tri Rapide

- Partition de Lamuto : Pseudo Code

```
Fonction PartitionLamuto ( T, d , f)
Début
    x = T[ f ]  # pivot
    i = d - 1,
    j = i + 1
    TantQue ( j < f )    // RN ≠ ∅
            Si T [ j ] < x alors
                    permuter ( T[ i + 1 ] ,  T [ j ] )
                    i = i + 1
            FinSi
            j = j + 1
    FinTantQue
    Permuter (T[ i + 1 ] , T[ f ] )
    retourner i + 1
Fin
```

Temps d'execution d'une itération de la partition pour un Tableau de taille n

Faire n-1 fois :
comparaison avec x
permuter, si nécessaire

Tps(n) = O(n)

Tri Rapide

- Partition : solution 2

```
Fonction Partition ( T, d , f)
Début
    x = T[ f ] // pivot
    indInf = d, indSup = f-1
    TantQue (indInf ≤  indSup )
            Si T [indInf ] < x alors
                    indInf += 1
            Sinon
                    permuter (T [indInf] , T [indSup])
                    indSup -= 1
            FinSi
    FinTantQue
    Permuter (T[indSup + 1 ] , T[ f ] )
    retourner indSup + 1
Fin
```

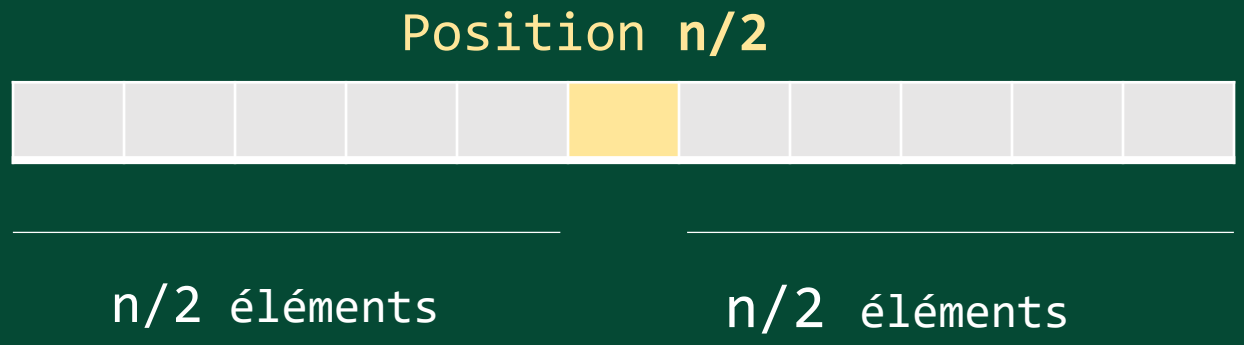
Tri Rapide

- Complexité (temporelle)
  - Cas 1 : partition balancée (position pivot au milieu)
    - $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + \Theta(n)$

    → Déjà vu (cf tri par fusion)

    → $T(n) = O(n.Log(n))$

    → Meilleur des cas



Tri Rapide

- Complexité (temporelle)
  - Pire des cas :
    - T trié initialement
    - Tous les éléménts sont inférieures au pivot T[n-1]
    - Faire n fois la permutation de T[i+1] et T[j]
    - Partition est un O(n)
    - Exemple d'une itération

T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = -1, j = 0, Permuter T[0] et T[0]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 0, j = 1, Permuter T[1] et T[1]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 1, j = 1, Permuter T[2] et T[2]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 2, j = 1, Permuter T[3] et T[3]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 3, j = 1, Permuter T[4] et T[4]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 4, j = 1, Permuter T[5] et T[5]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 5, j = 1, Permuter T[6] et T[6]
T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 6, j = 1, Pivot à sa position Finale

Tri Rapide

- Calcul de la Complexité temporelle
  - Pire des cas :
    - T trié initialement
    - Tous les éléménts sont inférieures au pivot T[n-1]
    - Faire n fois la permutation de T[i+1] et T[j]
    - Partition est un $\Theta(n)$

      T = [1 2 4 5 6 8 15] // i = 6, j = 1, Pivot à sa position Finale

    - $Tps(n) = Tps(n-1) + \Theta(n) = Tps(n-1) + Cn$

      $= Tps(n-2) + \Theta(n-1) + Cn = Tps(n-2) + C(n-1) + Cn$

      $= Tps(n-3) + C[(n-2) + (n-1) + n]$

      $= \ldots$

      $= Tps(1) + C[1 + \ldots + (n-1) + n] = n(n+1)/2$

  - Pire des cas = $O(n^2)$
  - Questions :
    - est ce que le pire des cas est celui qui se produit le plus ?
    - est ce que le meilleur des cas est celui qui se produit le plus ?

Tri Rapide

- Calcul de la Complexité temporelle : Pire des cas
  - Exemple : Soit la fonction suivante :

```
Fonction Geom ( p )
Début
    Si aleat( ) < p alors                    // aleat() génére des nbr entre 0 et 1
        retourner 1 + Geom ( p )
    Sinon
        retourner 1
    FinSi
Fin
```

- Remarque :
  - la proba que aleat() < p est égale à p
  - la proba que aleat() ≥ p est égale à 1 - p
- Question : Quelle est la complexité pire des cas de la fonction Geom ?
- Réponse : Théoriquement = + ∞

→ Intérêt à calculer la complexité moyenne (dans le cas moyen)

Tri Rapide

- Calcul de la Complexité Moyenne :
  - Complexité moyenne de la fonction Geom

$$Tps(p) = p \cdot [1 + Tps(p)] + (1 - p) \cdot 1$$

$$Tps(p) \cdot [1 - p] = p + 1 - p$$

$$Tps(p) = 1 / (1 - p)$$

Tri Rapide

myCompiler Français Récent Login S'inscrire

Entrez un titre...

Tps(p) = 1 / (1 – p) ✓

Python Exécuter Enregistrer

```
1  import random
2  def Geom ( p ):
3      if (random.random() < p) :
4          return 1 + Geom ( p )
5      else:
6          return 1
7
8  p = 0.8
9  k = 10
10 moy = 0
11
12 for k in range(k):
13     nbr_it = Geom(p)
14     print("nbr iteration pour p = ",p, " est :",nbr_it)
15     moy = moy + nbr_it
16 moy = moy / k
17 print(f"\nnbr MOYEN d'iterations pour p = {p} est : {moy:.2f}")
18
```

Entrée du programme

Sortie du programme

```
nbr iteration pour p =  0.8  est : 5
nbr iteration pour p =  0.8  est : 9
nbr iteration pour p =  0.8  est : 7
nbr iteration pour p =  0.8  est : 6
nbr iteration pour p =  0.8  est : 1
nbr iteration pour p =  0.8  est : 10
nbr iteration pour p =  0.8  est : 2
nbr iteration pour p =  0.8  est : 5
nbr iteration pour p =  0.8  est : 1
nbr iteration pour p =  0.8  est : 1

nbr MOYEN d'iterations pour p = 0.8 est : 5.22
```

Tri Rapide

myCompiler Français Récent Login S'inscrire

Entrez un titre...

Tps(p) = 1 / (1 – p) ✓

Python Exécuter Enregistrer

```
1  import random
2  def Geom ( p ):
3      if (random.random() < p) :
4          return 1 + Geom ( p )
5      else:
6          return 1
7
8  p = 0.95
9  k = 10
10 moy = 0
11
12 for k in range(k):
13     nbr_it = Geom(p)
14     print("nbr iteration pour p = ",p, " est :",nbr_it)
15     moy = moy + nbr_it
16 moy = moy / k
17 print(f"\nnbr MOYEN d'iterations pour p = {p} est : {moy:.2f}")
18
```

Entrée du programme

Sortie du programme

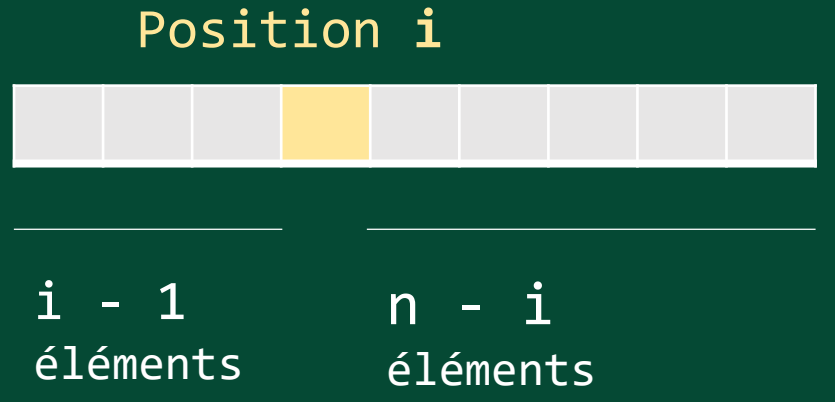
```
nbr iteration pour p =  0.95  est : 28
nbr iteration pour p =  0.95  est : 18
nbr iteration pour p =  0.95  est : 30
nbr iteration pour p =  0.95  est : 11
nbr iteration pour p =  0.95  est : 5
nbr iteration pour p =  0.95  est : 10
nbr iteration pour p =  0.95  est : 8
nbr iteration pour p =  0.95  est : 20
nbr iteration pour p =  0.95  est : 11
nbr iteration pour p =  0.95  est : 38

nbr MOYEN d'iterations pour p = 0.95 est : 19.89
```

Tri Rapide

- Complexité moyenne du Tri Rapide Tr(n) =
  - Tr(n - 1) + T(0) + Θ(n), proba = 1 / n
  - Tr(n - 2) + T(1) + Θ(n), proba = 1 / n
  - Tr(n - 3) + T(2) + Θ(n), proba = 1 / n
  - …
  - Tr(n - i) + T(i - 1) + Θ(n), proba = 1 / n
  - …
  - Tr(0) + T(n - 1) + Θ(n) , proba = 1 / n

Remarque:
Θ(n) coût pour que la partition mette le pivot à la position i



Tri Rapide

- Calcul de la Complexité Moyenne : (on remplace Θ(n) par C.n)
  - $Tr(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\, Tr(i-1) + Tr(n-i) + C.n \,]$
  - $Tr(n) = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Tr(i) + \frac{1}{n} . (n.C.n)$

    $= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Tr(i) + C.n$

A : $n . Tr(n) = 2 [Tr(0) + \dots + Tr(n-1)] + C . n^2$,

B : $(n-1) . Tr(n-1) = 2 [Tr(0) + \dots + Tr(n-2)] + C . (n-1)^2$,

A - B : $n.Tr(n) - (n-1) . Tr(n-1) = 2 . Tr(n-1) + C . (2n-1)$,

$n.Tr(n) = (n+1) . Tr(n-1) + C . (2n-1)$,

$Tr(n) = \frac{n+1}{n} . Tr(n-1) + C . (2 - 1/n)$, //On peut remplacer $2C \leftarrow C.(2 - 1/n)$

$Tr(n) = \frac{n+1}{n} . Tr(n-1) + 2.C$,

Tri Rapide

- D'une manière récursive

$Tr(n) = \frac{n+1}{n} . Tr(n-1) + 2C,$

$Tr(n) = \frac{n+1}{n} . [\frac{n}{n-1} . Tr(n-2) + 2C] + 2C,$

$= \frac{n+1}{n-1} . Tr(n-2) + \frac{n+1}{n} . 2C + 2C,$

$= \frac{n+1}{n-2} . Tr(n-3) + \frac{n+1}{n-1} . 2C + \frac{n+1}{n} . 2C + 2C,$

$= \frac{n+1}{n-j+1} . Tr(n-j) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{n+1}{n-i} . 2C + 2C,$

...

$= \frac{n+1}{n-n+1} . Tr(n-n) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-i} . 2C + 2C,$ or $T(0) = 0$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-i} . 2C + 2C,$

Tri Rapide

$$Tr(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-i} . 2C + 2C,$$

$$= 2C.(n+1)\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right] + 2C$$

Or $\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right] = Log(n) + \beta$, tq $\beta > 0$

$$= \Theta(Log(n))$$

- $Tr(n) = 2C.(n+1) . \Theta(Log(n)) + 2C$

$$= \Theta(n . Log(n)) = \text{Complexité } \underline{\text{Moyenne}} \text{ du Tri Rapide}$$

References

- Introduction à l'algorithmique. Cours et exercices. Cormen et al. 2e édition. (En 3rd Edition)

- Algorithms, FOURTH EDITION, Robert Sedgewick and Kevin Wayne. Princeton University.

- https://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/